Bloque 1: Variables aleatorias y modelos probabilísticos discretos y continuos

Ejercicios propuestos:

**1.-** Un experimento consiste en lanzar 3 veces una moneda, definiéndose la variable aleatoria X como el número de caras obtenidas. Se pide:

(a) Definir el espacio muestral y determinar el rango de X.
(b) Obtener la función de probabilidad y representarla.
(c) Obtener la función de distribución y representarla.
(d) Determinar la probabilidad de obtener 2 o menos caras.
(e) Calcular la probabilidad de obtener más de 1 cara.
(f) Obtener el número esperado de caras y la varianza de X.

**2.-** La función de densidad de una determinada variable aleatoria X viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} k.x & ,si \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & ,resto \end{cases}$$

Determinar:

(a) El valor de k para que f sea función de densidad, así como la representación gráfica de f.
(b) Obtener la función de distribución y representarla.
(c) P ($0 \le X \le 1$).
(d) P ($X = 1$).
(e) Media y varianza de la v.a. X.

**3.-** Para el lanzamiento de dos dados, se define una variable aleatoria X que toma el valor 1 si se obtienen dos resultados pares, el valor 2 si los dos son impares y 3, si se obtiene uno par y el otro impar.

(a) Determinar la función de probabilidad de X y representarla.
(b) Hallar la función de distribución de X y su representación gráfica.
(c) Probabilidad de la variable X tome un valor mayor que 1.
(d) Hallar la media y la varianza de X.

**4.-** La función de distribución de probabilidad asociada a un determinado componente eléctrico es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \ x < 1 \\ k\,(x^2 - 1) & si \ 1 \le x \le 4 \\ 1 & si \ x > 4 \end{cases}$$

(a) Determinar la función de densidad, así como el valor de k para que lo sea.
(b) P ($1'5 \le X \le 3$)
(c) Determinar la media y la varianza de X.

**5.-** La siguiente función recoge la distribución diaria de la tela, en miles de metros, que produce una máquina:

$$f(x) = \begin{cases} k.x^2 & ,si \quad 2 \le x \le 3 \\ 0 & ,resto \end{cases}$$

Se pide:

(a) Obtener el valor de k para que f sea función de densidad.
(b) Determinar la función de distribución.
(c) ¿Cuántos metros diarios de tela se espera que produzca la máquina por término medio?

**6.-** Algunos economistas han propuesto que haya un control de salarios y precios para combatir la inflación, pero otros consideran que esos controles no son efectivos porque tratan los efectos y no las causas de la inflación. Un reciente encuesta revela que el 40 % de los españoles adultos están a favor de un control de precios y salarios. Si se seleccionan 5 adultos aleatoriamente:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté a favor del citado control?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo 3 estén a favor del control?
(c) Por término medio, ¿cuántos estarán a favor del control?

**7.-** El número de clientes que llegan a un banco sigue una distribución de Poisson. Si el número promedio es de 120 clientes a la hora, se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen al menos 3 clientes?
(b) Calcula probabilidad de que lleguen en 6 minutos a lo sumo 2 clientes.

**8.-** Un fabricante de automóviles compra los motores a una compañía donde se fabrican bajo estrictas especificaciones. El fabricante recibe un lote de 40 motores. Su plan para aceptar el lote consiste en seleccionar 8 de forma aleatoria y someterlos a prueba. Si encuentra que ningún motor presenta serios defectos acepta el lote; de otra forma, lo rechaza. Si se sabe que el lote contiene dos motores con serios defectos:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de aceptar el lote?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya dos motores defectuosos en la muestra examinada?
(c) De los 8 motores examinados, ¿cuántos se espera que sean defectuosos?

**9.-** En cierto hospital se ha comprobado que el ingreso por urgencias de lesionados en accidentes de circulación la noche de los sábados sigue una pauta media de 2 accidentados cada media hora.

(a) Si al comenzar la noche, a la enfermera de admisiones le quedan dos horas de turno. ¿Qué probabilidad hay de que admita menos de tres accidentados en lo que le queda de turno?
(b) Un enfermero desea tomarse un café y calcula que tardará 15 minutos, pero no puede dejar el servicio. ¿Qué probabilidad tendría de que no se notara su ausencia si decide arriesgarse e ir a tomar el café?

**10.-** Un tirador especializado de los GEO presenta en su currículum un 95 % de acierto en disparos a un blanco estándar a 100 metros.

(a) Durante la fase de clasificación para las finales del campeonato de tiro de la policía debe disparar 100 veces a un blanco que está a 100 m., ¿qué probabilidad hay de que falle menos de 5 disparos?
(b) Supongamos que llega a la final en la que ha de realizar 10 disparos al mismo tipo de blanco, ¿Qué probabilidad tiene de acertarlos todos? ¿Cuántos espera él que den en el blanco?

**11.-** Una compañía que se dedica a la fabricación de impresoras ha detectado un fallo en el proceso de producción que ha provocado que el 10 % de la unidades fabricadas sean defectuosas. La compañía ha distribuido las impresoras a los centros de venta en lotes de 10 unidades.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote tenga alguna impresora defectuosa?
(b) Se ha repartido un lote de impresoras en cada uno de los 57 centros de ventas con que cuenta la compañía. Cada lote será devuelto si se encuentran más de dos impresoras defectuosas. Calcule la probabilidad de que se devuelvan menos de 3 lotes de los repartidos a los centros.
(c) Si en un determinado almacén el lote de impresoras recibido tuviera 4 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionadas 5 impresoras al azar, ninguna sea defectuosa en la muestra?

**12.-** El peso en toneladas de los rollos de acero fabricados en una planta sigue una distribución normal N(10, 0'5).

(a) Si sólo de admiten los rollos que tengan un peso comprendido entre 9'5 y 11 toneladas, ¿cuál sería la probabilidad de rechazar un rollo?
(b) ¿Cuánto debe pesar un rollo de acero para que el 60 % de los fabricados pesen más que él?

**13.-** El gasto semanal que realiza una familia en alimentos es aleatorio y sigue una distribución normal. Del último censo se desprende que el 40 % de la población gasta más de 66 € a la semana en alimentos y tan sólo un 2'5 % no alcanza los 48 €.

(a) Calcula el gasto medio y la varianza del gasto.
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar gaste más de 54 € a la semana en alimentos?

**14.-** Calcular las siguientes probabilidades:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $P( \chi^2_{21} \leq 8'89)$ | (b) $P( -1'812 \leq t_{10} \leq 1'372)$ | (c) $P (F_{7,15} \geq 2'16)$ |
| (d) $P (-0'72 \leq Z \leq 1'52)$ | (e) $P ( Z \geq -0'25)$ | (f) $P ( \chi^2_5 \leq 11'07)$ |
| (g) $P ( t_5 \leq 2'015)$ | (h) $P ( \chi^2_{13} \geq 5'01)$ | (i) $P (F_{6,9} \leq 2'55)$ |
| (j) $P ( Z > 0'623)$ | (k) $P ( t_{15} \leq 1)$ | (l) $P ( \chi^2_{13} \leq 6)$ |

**15.-** Determinar los siguientes puntos críticos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $\chi^2_{16,\, 0'01}$ | (b) $t_{20,\, 0'75}$ | (c) $F_{7,\, 10,\, 0'75}$ | (d) $Z_{0'512}$ |
| (e) $t_{9,\, 0'4}$ | (f) $F_{9,\, 12,\, 0'1}$ | (g) $\chi^2_{61,\, 0'33}$ | (h) $t_{40,\, 0'9}$ |
| (i) $\chi^2_{6,\, 0'8}$ | (j) $Z_{0'2709}$ | (k) $t_{20,\, 0'7}$ | (l) $Z_{0'95}$ |

**16.-** Un consultor de dirección ha encontrado que la cantidad de tiempo que invierten diariamente los ejecutivos en realizar tareas que con la misma eficacia podrían realizar sus subordinados se ajusta convenientemente a una distribución normal. Ha comprobado, además, que el 10 % de los ejecutivos invierten en esas tareas más de 3'5 horas, y que el 17'62 % invierten menos de 1'6 horas.

(a) ¿Qué proporción de ejecutivos invierten entre 2 y 3 horas en esas tareas?
(b) Si se tomaran 10 ejecutivos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos emplee más de 3'26 horas en estas labores?

**17.-** A una ventanilla de una oficina de la Agencia Tributaria llegan aproximadamente 7 personas por hora. Generalmente, si acuden a la ventanilla más de 5 personas en una hora, se forma cola.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que se forme cola en una ventanilla en una hora determinada?
(b) Si en la oficina considerada hay 10 ventanillas, ¿cuál es la probabilidad de que en una hora se forme cola en más de 7 ventanillas?
(c) Si la Agencia Tributaria posee 210 oficinas (con 10 ventanillas cada una) en todo el país, ¿cuál es la probabilidad de que en una determinada hora haya al menos 1500 ventanillas con cola?

**18.-** En unas oposiciones a las que se han presentado 1500 aspirantes, 1262 han obtenido una calificación igual o inferior a 6, y sólo 15 una puntuación por encima de 8. Se supone que la distribución de las puntuaciones es normal.

(a) Con la información anterior, hallar la media y la varianza de la puntuación.
(b) Porcentaje de individuos con puntuación por debajo de 5.
(c) Se han convocado 100 plazas. ¿Cuál es la puntuación mínima que debe alcanzar un opositor para obtener un puesto de trabajo?

**19.-** Un proveedor de cerraduras de puertas blindadas envía las piezas en lotes de 100 cerraduras a las fábricas que se dedican a la producción y comercialización de tales puertas. Como consecuencia de fallos en el proceso de fabricación, el proveedor se encontró con una serie de cerraduras defectuosas; pero, para evitar las pérdidas que se producirían si retira estas piezas, decidió introducir 5 cerraduras defectuosas en cada uno de los lotes con la esperanza de que pasaran desapercibidas por los controles de calidad que realizan sus clientes, que consisten en seleccionar dos cerraduras al azar de un lote, de manera que, si ninguna presenta defectos, el lote será aceptado por la fábrica, y en caso contrario, será devuelto al proveedor.

**(a)** ¿Cuál es la probabilidad de que en el control de calidad de un lote se encuentre al menos una cerradura defectuosa?
**(b)** Si 51 clientes del proveedor han recibido un lote de cerraduras, ¿cuál es la probabilidad de que devuelvan el lote recibido menos de 4 clientes?